6 Punkte **Aufgabe 1**

Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ gegeben. Betrachten Sie die folgenden Aussagen:

(1) f ist stetig,

(2) f ist differenzierbar,

(3) f ist integrierbar,

(4) f ist beschränkt.

Markieren Sie in der Ergebnistabelle (siehe Rückseite des Titelblattes) das Kästchen i.k mit einem „X", wenn Sie der Überzeugung sind, dass aus der Aussage (i) stets die Aussage (k) folgt; andernfalls lassen Sie das Kästchen i.k frei. (Natürlich erhalten alle Kästchen i.i die Markierung; diese ist bereits eingetragen.)

Hinweis: Beachten Sie, dass $[a, b]$ kompakt ist. Sie erhalten für jede richtige Antwort einen halben Punkt. Beweise werden zu dieser Aufgabe nicht verlangt.

Aufgabe 2

2 Punkte (a) Geben Sie eine Formulierung

(i) des Majorantenkriteriums,

(ii) des Quotientenkriteriums

für die Konvergenz einer Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

6 Punkte (b) Beweisen Sie, dass die Reihen

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{3n^3+n^2+1}$,

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^\alpha}{2^n}$ (mit $\alpha \in \mathbb{R}$)

konvergieren.

Aufgabe 3

Sei $f : [-2, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ durch $f(x) := \sqrt{4-x^2}\log(4-x)$ definiert.

6 Punkte (a) Begründen Sie sehr sorgfältig mithilfe Ihnen bekannter Sätze, dass f auf $]-2, 2[$ differenzierbar ist, und berechnen Sie dort die Ableitung.

4 Punkte (b) Weisen Sie die Existenz eines $\xi \in]-2, 2[$ mit $f'(\xi) = 0$ nach.

Aufgabe 4

Es sei $f_n : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ für $n \in \mathbb{N}$ durch

$$f_n(x) := \frac{nx\cos x}{1+nx} \quad \text{für } x \in [0,1]$$

definiert.

4 Punkte (a) Zeigen Sie, dass die Folge (f_n) punktweise konvergiert, und geben Sie die Grenzfunktion an.

4 Punkte (b) Ist die Folge (f_n) gleichmäßig konvergent? (Beweisen Sie Ihre Antwort!)

Aufgabe 5

Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^a \frac{x}{\sqrt{1+x}}\,dx$ für $a > 0$

4 Punkte (i) mithilfe partieller Integration,

4 Punkte (ii) mithilfe der Substitution $x = t^2 - 1$ $(t > 0)$, also $t = \sqrt{1+x}$.

(Vergessen Sie nicht, die Voraussetzungen zur Anwendung der partiellen Integration bzw. der Substitutionsregel zu überprüfen.)

Aufgabe 6

Es sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x\sin y}{y}, & \text{falls } y \neq 0, \\ 0, & \text{falls } y = 0. \end{cases}$$

2 Punkte (a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $D_1 f(x,y)$ und $D_2 f(x,y)$ in allen Punkten $\binom{x}{y}$ mit $y \neq 0$.

2 Punkte (b) Zeigen Sie, dass $D_1 f(a,0)$ für alle Punkte $\binom{a}{0}$ mit $a \in \mathbb{R}$ existiert, und berechnen Sie den Wert.

4 Punkte (c) Zeigen Sie, dass $D_2 f(a,0)$ genau für $a = 0$ existiert. Berechnen Sie $D_2 f(0,0)$.

4 Punkte (d) Ist f im Punkt $\binom{0}{0}$ differenzierbar? (Beweisen Sie Ihre Antwort!)

[Hinweis: Sie dürfen Eigenschaften des Sinus wie z. B. $\lim\limits_{y\to 0} \frac{\sin y}{y} = 1$ oder $\frac{2}{\pi}|y| \leq |\sin y| \leq |y|$ für $|y| \leq \frac{\pi}{2}$ ohne Beweis benutzen.]