FernUniversität
Gesamthochschule in Hagen

FACHBEREICH MATHEMATIK

Matrikelnummer

Postanschrift: FernUniversität D - 58084 Hagen

Name, Vorname _____

_____

Straße,Nr. _____

PLZ, Wohnort _____

Kurs: 01182 Mathematik für Informatiker II
Klausur am 26.08.2000, 10–13 Uhr

Gasthörer/in: Ja ○ Nein ○

Geb.Datum: _____

Hinweise: (Bitte vor Arbeitsbeginn durchlesen!)

1. Schreiben Sie Ihre Klausur bitte nicht mit Bleistift.
2. Geben Sie bitte oben Ihre Matrikel-Nr. und Adresse leserlich und vollständig an.
3. Irgendwelche Hilfsmittel wie Studienbriefe, Glossare, Bücher, Aufzeichnungen, Taschenrechner, Handys etc. dürfen während der Klausur **nicht** benutzt werden.
4. Schreiben Sie auf jedes Blatt, das Sie abgeben, Ihren Namen.
5. Gestalten Sie Ihren Text so, dass zweifelsfrei ist, zu welcher Aufgabe welcher Lösungstext gehört.
6. Kreuzen Sie unten die Aufgaben an, die Sie bearbeitet haben.
7. Aufgaben und Teilaufgaben dürfen unabhängig voneinander bearbeitet werden.
8. Füllen Sie bitte den Schein-Vordruck und die Bescheinigung für das Finanzamt (falls gewünscht) aus.
9. Formulieren Sie Ihre Lösungen so, dass der Korrektor Ihre Beweisschritte nachvollziehen kann.
10. Bei jeder Aufgabe ist die erreichbare Höchstpunktzahl vermerkt. Sie haben die Klausur bestanden, wenn Sie mindestens **35** Punkte erreichen.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	Summe
bearbeitet												
maximale Punktzahl	4	6	6	6	6	8	8	8	8	8	6	74
erreichte Punktzahl												
Korrektor												

Datum: _____ Note: _____

Formelsammlung

$f : I \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x)$ mit $f(x) :=$	Definitionsintervall(e) I	Stammfunktion $F : I \to \mathbb{R}$ mit $F(x) :=$
$x^n \quad (n \in \mathbb{N}^0)$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{n+1}x^{n+1}$
$x^{-n} \quad (n \in \mathbb{N},\ n \geq 2)$	$]-\infty, 0[,\ ]0, \infty[$	$\frac{1}{-n+1}x^{-n+1}$
x^{-1}	$]0, \infty[$	$\log x\ (= \log \lvert x \rvert)$
x^{-1}	$]-\infty, 0[$	$\log(-x)\ (= \log \lvert x \rvert)$
$x^a \quad (a \in \mathbb{R},\ a \neq -1)$	$]0, \infty[$	$\frac{1}{a+1}x^{a+1}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\mathbb{R}$	$\arctan x$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$]-1, 1[$	$\arcsin x$
$e^x\ (= \exp x)$	$\mathbb{R}$	e^x
$a^x\ (= e^{x \log a})$ mit $a > 0,\ a \neq 1$	$\mathbb{R}$	$\frac{1}{\log a}a^x$
$\cos x$	$\mathbb{R}$	$\sin x$
$\sin x$	$\mathbb{R}$	$-\cos x$
$\frac{1}{\cos^2 x}\ (= 1 + \tan^2 x)$	$](k - \frac{1}{2})\pi, (k + \frac{1}{2})\pi[\quad (k \in \mathbb{Z})$	$\tan x$
$\frac{1}{\sin^2 x}\ (= 1 + \cot^2 x)$	$]k\pi, (k+1)\pi[\quad (k \in \mathbb{Z})$	$-\cot x$
$\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$	$\mathbb{R}$	$\sinh x$
$\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$	$\mathbb{R}$	$\cosh x$

4 Punkte **Aufgabe 1**

Zeigen Sie, dass die Ungleichung

$$x + \frac{1}{x} \geq 2$$

für alle positiven reellen Zahlen x gilt.

Aufgabe 2

Untersuchen Sie die nachstehenden reellen Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert. Begründen Sie Ihre Aussagen.

3 Punkte a) $a_n = \dfrac{3n^2 - 6n + 1}{2n^3 - 4}$,

3 Punkte b) $a_n = \cos \pi n$.

Aufgabe 3

Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf Konvergenz. Begründen Sie Ihre Aussagen.

3 Punkte a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + n}$,

3 Punkte b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{9^n}{n!}$.

Aufgabe 4

Sei $D \subset \mathbb{R}$ eine nichtleere Menge reeller Zahlen und $f : D \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion.

2 Punkte a) Wann heißt f gleichmäßig stetig (auf D)?

4 Punkte b) Für alle $x, y \in D$ gelte

$$|f(x) - f(y)| \leq \sqrt{|x - y|}.$$

Zeigen Sie, dass f dann gleichmäßig stetig ist.

(Hinweis: Verwenden Sie die Stetigkeit der Wurzelfunktion im Nullpunkt.)

Aufgabe 5

2 Punkte a) Formulieren Sie die Kettenregel für differenzierbare Funktionen.

4 Punkte b) Berechnen Sie die Ableitung von $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ x \mapsto f(x) := e^{-x^2} \cdot \sin\left(\pi(1-2x)^5\right)$.

Aufgabe 6

2 Punkte a) Formulieren Sie den 1. Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

6 Punkte b) Sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 1$. Zeigen Sie: $(1+x)^a > 1 + ax$ für alle $x > 0$.

(Hinweis: Für $x > 0$ ist $x^a = \exp(a \log x)$.)

Aufgabe 7

Untersuchen Sie, ob die folgenden Grenzwerte existieren, und berechnen Sie sie gegebenenfalls:

3 Punkte a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$,

5 Punkte b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{1-\cos(2x)}$.

Aufgabe 8

2 Punkte a) Sei $D \subset \mathbb{R}$, $D \neq \emptyset$. Wann heißt eine Folge (f_n) in $Abb(D, \mathbb{R})$ gleichmäßig konvergent (konvergent im Sinne der Norm)?

b) Entscheiden Sie (mit Begründung), ob die folgenden Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $[0,1]$ gleichmäßig konvergieren:

2 Punkte (1) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := f(x)$ mit $f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x > 0 \end{cases}$,

4 Punkte (2) $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) := \dfrac{\sin(n+x)}{n}$.

Aufgabe 9

2 Punkte a) Definieren Sie den Begriff des Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-a)^n$ $(a_n, a \in \mathbb{R})$.

6 Punkte b) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der folgenden Potenzreihe, und bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, in denen sie konvergiert:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2^n + 2^{-n}) x^n.$$

Aufgabe 10

2 Punkte a) Formulieren Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung.

6 Punkte b) Es seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig. Zeigen Sie: Für alle $\alpha, \beta \in [a,b]$, $\alpha < \beta$ und $C \in \mathbb{R}$ gibt es genau eine Stammfunktion F von f mit

$$\int_{\alpha}^{\beta} F(x)\, dx = C.$$

Aufgabe 11

Berechnen Sie die folgenden Integrale:

3 + 3 Punkte a) $\displaystyle\int_2^{\sqrt{\pi+4}} x\cos(x^2-4)\, dx$, b) $\displaystyle\int_0^1 x^2 \cosh x\, dx$.

(Hinweis: $\cosh x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$ und $\sinh x = \frac{1}{2}(e^x - e^{-x})$ für alle $x \in \mathbb{R}$.)