Aufgabe 1

Bestimmen Sie für folgende komplexe Zahlen z jeweils Re z, Im z und $|z|$; geben Sie außerdem jeweils $\bar{z}$ und z^{-1} in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ an.

4 Punkte a) $z = (5 + i) - (1 - 2i)$,

4 Punkte b) $z = (1 + 2i) \cdot (2 + i)$,

4 Punkte c) $z = \dfrac{2 - i}{3 - 4i}$.

Aufgabe 2

a) Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K, $n \in \mathbb{N}$ eine natürliche Zahl und $v_1, \ldots, v_n \in V$ seien paarweise verschiedene Vektoren.

2 Punkte (i) Wann heißen $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig?

2 Punkte (ii) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V ?

2 Punkte (iii) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ?

b) Untersuchen Sie, ob die folgenden Vektoren des $\mathbb{R}^3$

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad v_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

2 Punkte (i) linear unabhängig sind,

2 Punkte (ii) ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ bilden,

2 Punkte (iii) eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 3

2 Punkte a) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K.
Wann heißt eine Teilmenge U von V ein Untervektorraum von V ?

b) Entscheiden Sie, welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume von $\mathbb{R}^3$ sind und begründen Sie Ihre Antwort :

2 Punkte (i) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 = x_2 = x_3 \right\}$,

2 Punkte (ii) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 + 3 = 4 \right\}$,

2 Punkte (iii) $U_3 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,\middle|\, x_1 + x_2 + 3 = 3 \right\}$,

Aufgabe 4

8 *Punkte* Bestimmen Sie die Lösungsmenge $L(G_a)$ des folgenden reellen linearen Gleichungssystems in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

$$G_a \quad \begin{array}{rcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ 4x_1 & + & 7x_2 & + & 6x_3 & = & 3 \\ 5x_1 & + & 8x_2 & + & 9x_3 & = & 6a \end{array}$$

Aufgabe 5

2 *Punkte* a) Formulieren Sie die Dimensionsformel für ein homogenes lineares Gleichungssystem

$$G \quad x_1 v_1 + \cdots + x_n v_n = 0$$

mit $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_n \in \mathbb{R}^m$.

10 *Punkte* b) Betrachten Sie nun das homogene lineare Gleichungssystem

$$G \; Ax = 0 \text{ mit der Matrix } A := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R}).$$

Bestimmen Sie jeweils eine Basis von L(G), dem Lösungsraum, und von Bild A.

Aufgabe 6

8 *Punkte* Gegeben sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ und das Polynom $p \in \mathrm{Pol}\,\mathbb{R}$ mit $p(x) = x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 1$.

Berechnen Sie p(A).

Aufgabe 7

3 *Punkte* a) Es seien V, W Vektorräume über einem Körper K und $f: V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung.
Wie sind die folgenden Begriffe definiert ?

(i) Kern f, (ii) Bild f, (iii) rang f.

7 *Punkte* b) Die lineare Abbildung $f: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei definiert durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 \\ x_1 + 5x_2 - 4x_3 \\ 3x_1 + 3x_2 \end{pmatrix} \text{ füralle } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(Sie brauchen nicht nachzuweisen, daß f tatsächlich linear ist.)
Bestimmen Sie jeweils eine Basis von Kern f und von Bild f, und ermitteln Sie rang f.

Aufgabe 8

Gegeben sei die reelle Matrix $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$.

2 Punkte **a)** Berechnen Sie $A^\sharp$.

2 Punkte b) Berechnen Sie det ***(AH).***

2 Punkte c) Berechnen Sie $A^{\sharp\sharp}$.

2 Punkte **d)** Berechnen Sie det $(A^{\sharp\sharp})$.

2 Punkte e) Stellen Sie fest, ob $A^\sharp$ invertierbar ist, und ermitteln Sie gegebenenfalls die inverse Matrix $(A^\sharp)^{-1}$.

Aufgabe 9

Seien K ein Körper, n $\in \mathbb{N}$ und $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Mat}_n(K)$.

2 Punkte a) Wie ist $\mathrm{Eig}_A(\lambda)$ für $\lambda \in K$ definiert ?

2 Punkte **b)** Wann heißt $v \in K^n$ Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$**?**

4 Punkte c) Es sei v_1 ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ zum Eigenwert λ_1, und v_2 sei ein Eigenvektor von $\boldsymbol{A}$ zum Eigenwert λ_2 mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$.
Beweisen Sie, daß v_1 und v_2 linear unabhängig sind.

Aufgabe 10

Sei $\boldsymbol{A} \in \mathrm{Mat}_3(\mathbb{R})$ definiert durch

$$A := \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \end{pmatrix}.$$

5 Punkte a) Bestimmen Sie das charakteristische Polynom und die Eigenwerte von $\boldsymbol{A}$**.**

4 Punkte b) Geben Sie zu jedem Eigenwert von $\boldsymbol{A}$ eine Basis des zugehörigen Eigenraums an.

3 *Punkte* *c)* Stellen Sie fest, ob $\boldsymbol{A}$ diagonalisierbar ist, begründen Sie Ihr Ergebnis und ermitteln Sie gegebenenfalls eine invertierbare Matrix $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$, für die $P^{-1}AP$ eine Diagonalmatrix ist.