Aufgabe 1

5 Punkte Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \frac{1}{3}n(n+1)(n+2).$$

Aufgabe 2

2 Punkte **a)** Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Wann heißt eine Teilmenge U von V ein Untervektorraum von V?

b) Stellen Sie (mit Begründung) fest, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ sind.

2 Punkte (1) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R},\ x_1 + x_2 \geq 0 \right\}$,

2 Punkte (2) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ x_2 - x_1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 3

a) Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K, $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$ paarweise verschieden.

2 Punkte (1) Wann heißen die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig?

2 Punkte (2) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V?

2 Punkte (3) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V?

b) Prüfen Sie (mit Begründung), ob die Vektoren

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

4 Punkte (1) linear unabhängig sind;

2 Punkte (2) eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 4

2 Punkte **a)** K sei ein Körper, V, W seien Vektorräume über K und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Wie ist $\operatorname{Kern} f$ definiert?

b) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 - 4x_3 \\ x_1 + 6x_2 - 2x_3 \\ -2x_2 - x_3 \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(Sie brauchen *nicht* nachzuweisen, dass f linear ist.)

6 Punkte (1) Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} f$ durch Angabe einer Basis.

1 Punkt (2) Ist f injektiv?

6 Punkte **Aufgabe 5**

Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$G \qquad \begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 - x_3 &= 1 \\ 2x_1 + 2x_2 \phantom{{}- 2x_3} &= 2 \\ -4x_1 - 4x_2 + 2x_3 &= 0\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$.

2 Punkte **a)** Wann heißt eine Matrix $P \in \operatorname{Mat}_n(K)$ invertierbar?
(Gefragt ist nach der *Definition*, *nicht* nach einer dazu äquivalenten Bedingung.)

4 Punkte **b)** Sei $P \in \operatorname{Mat}_n(K)$ invertierbar. Beweisen Sie, dass die zu P inverse Matrix eindeutig bestimmt ist.
(Die Aussage steht im Kurs, sie soll hier nochmal bewiesen werden.)

Aufgabe 7

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$.

a) Definieren Sie folgende Begriffe:

2 Punkte (1) Eigenwert von A,

2 Punkte (2) Eigenraum $\operatorname{Eig}_A(\lambda)$ von A zum Eigenwert λ.

3 Punkte **b)** Seien λ_1, λ_2 Eigenwerte von A mit $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Zeigen Sie:

$$\operatorname{Eig}_A(\lambda_1) \cap \operatorname{Eig}_A(\lambda_2) = \{0\}.$$