Aufgabe 1

6 Punkte Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}.$$

Aufgabe 2

2 Punkte a) Es sei V ein Vektorraum über einem Körper K. Wann heißt eine Teilmenge U von V ein Untervektorraum von V?

b) Stellen Sie (mit Begründung) fest, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^3$ Untervektorräume des $\mathbb{R}$-Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ sind.

2 Punkte (1) $U_1 := \{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$,

2 Punkte (2) $U_2 := \{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \}$.

Aufgabe 3

a) Es seien V ein Vektorraum über einem Körper K, $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$ paarweise verschieden.

2 Punkte (1) Wann heißen die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig?

2 Punkte (2) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V?

2 Punkte (3) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V?

b) Prüfen Sie (mit Begründung), ob die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 6 \\ 7 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

4 Punkte (1) linear unabhängig sind;

2 Punkte (2) ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^3$ bilden;

1 Punkt (3) eine Basis von $\mathbb{R}^3$ bilden.

Aufgabe 4

2 Punkte a) K sei ein Körper, V, W seien Vektorräume über K und $f : V \longrightarrow W$ eine lineare Abbildung. Wie ist $\operatorname{Kern} f$ definiert?

6 Punkte b) Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sei gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} 2x_1 + x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \quad \text{für alle} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(Sie brauchen *nicht* nachzuweisen, dass f linear ist.)
Bestimmen Sie $\operatorname{Kern} f$ durch Angabe einer Basis.

6 Punkte **Aufgabe 5**

Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$:

$$G \qquad \begin{aligned} -2x_1 + 2x_2 + x_3 &= -5 \\ 2x_1 - 2x_2 \qquad &= 4 \\ -5x_1 + 5x_2 - x_3 &= -9\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$.

2 Punkte a) Wann heißt eine Matrix $P \in \operatorname{Mat}_n(K)$ invertierbar?
(Gefragt ist nach der *Definition*, *nicht* nach einer dazu äquivalenten Bedingung.)

2 + 6 Punkte b) Sei $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$. Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind:
(1) A ist invertierbar.
(2) Für alle $B \in \operatorname{Mat}_n(K)$ mit $AB = 0$ ist $B = 0$.

Aufgabe 7

Seien K ein Körper, $n \in \mathbb{N}$ und $A \in \operatorname{Mat}_n(K)$.

a) Definieren Sie folgende Begriffe:

2 Punkte (1) Eigenwert von A,

2 Punkte (2) Eigenvektor von A zum Eigenwert λ.

4 Punkte b) Seien v_1 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_1 und v_2 ein Eigenvektor von A zum Eigenwert λ_2. Es gelte $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Zeigen Sie: v_1, v_2 sind linear unabhängig.