01152 - Mathematik für Informatiker II (Bachelor)

27. August 2006

1 Hauptklausur am 19.08.2006 - Gedächtnisprotokoll

Auf den folgenden Seiten findet ihr die Aufgaben der Klausur. Diese entstammen Notizen und Gedächtnis. Dürften jedoch im Großen und Ganzen stimmen.

Die Klausur hat zwei Stunden gedauert. Zum Bestehen müssen 12 Punkte erreicht werden. In jedem Teilgebiet mindestens drei Punkte.

1.1 Analysis

1.1.1 Aufgabe 1

a) Es sei $(a_n)_{n\epsilon\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge reeller Zahlen. Welche Aussagen sind unter dieser Voraussetzung richtig?

- Die Folge a_n^2 ist kovergent.
- Die Folge a_n ist monoton.
- Die Folge a_n ist beschränkt.
- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ist konvergent.

Für jede richtige Antwort gibt es 0,5 Punkte. Eine falsche Antwort 0 Punkte. In Teilaufgabe a) sind keine Begründungen verlangt. Insgesamt gibt es 2

Punkte.

b) Untersuche, ob die Folge $(\frac{n-1}{2n-7})_{n\epsilon\mathbb{N}}$

- kovergent
- monoton
- beschränkt ist? Hier gibt es drei Punkte.

c) Untersuche, ob die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{2n-7}$ konvergiert. Ein Punkt.

1.1.2 Aufgabe 2

Sei f: $\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, f(x) := $x^3 e^x$
Nachvollziehbare Rechnungen werden erwartet.
a) Berechne die erste Ableitung f' (1 Pkt.)
b) Bestimme die Nullstelle von f' (1 Pkt.)
c) Berechne die zweite Ableitung f" (1 Pkt.)
d) Berechnen die Funktionswerte von f" an den in Teilaufgabe b) bestimmten Nullstellen von f'. Was kann man dann über die lokalen Extrema von f aussagen? (1 Pkt.)
e) Formuliere die Regel über die partielle Integration (1 Pkt.)
f) Berechne $\int_a^b xe^x dx$ (1 Pkt.)

1.2 Numerik

1.2.1 Aufgabe 3

a) Es sein die Größen x_1 und x_2 näherungsweise durch $x_i = \tilde{x}_i - \varepsilon_i$, i = 1,2 bekannt. Dann lautet der absolute Fehler η des Resultats, das aus x_1 und x_2 durch Division entsteht

$$\eta = \frac{1}{x_1}\varepsilon_1 - \frac{x_1}{(x_2)^2}\varepsilon_2$$

Richtig oder Falsch (1 Pkt.).

b) Bestimmen Sie mit Hilfe der Euklidischen Division die 2-adische Darstellung von 2006 := $[2006]_{10}$. 1,5 Pkt.

c) Die Funktion f: $\mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \frac{e^{sin\, x}}{x} - 1$$

besitzt in dem Intervall $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ eine Nullstelle $\tilde{x}$. Bestimme eine Näherung x_2 der Nullstelle $\tilde{x}$ von f auf $[\frac{\pi}{2}, \pi]$ mit Hilfe des Sekantenverfahrens. Die Startwerte $x_0$und x_1 sind gegenben durch $x_0 = \frac{\pi}{2}$ und $x_1 = \pi$. (3,5 Pkt.).

1.2.2 Aufgabe 4

a) Die Lagrange- Grundpolynome $l_{\mu,\mu} = 0, ..., n$ zu einem Satz von Stützstellen $x_0 ..., x_n$ lauten

$$l_\mu(x) = \Pi^n_{v=0;\, v \neq \mu} \frac{x - x_v}{x_\mu - x_v}$$

Richtig oder Falsch (1 Pkt.).

b) Bestimme die Partialbruchzerlegung der rationalen Funktion r_{02} gegeben durch

$$r_{02}(x) = \frac{1}{x(x+1)}$$

(1,5 Pkt.)

c) Folgende Daten sind gegeben

i	0	1	2	3
Stützstellen x_i	-2	-1	1	2
Daten y_i	1	-1	1	-1

Bestimme das Interpolationspolynom p in Monomdarstellung mit der Eigenschaft $p(x_i) = y_i$, $0 \leq i \leq 3$. (3,5 Pkt.).

1.3 Stochastik

1.3.1 Aufgabe 5

Ein fairer Würfel wird zweimal geworfen. Dieses Experiment wird modelliert mit einem diskreten W-Raum (Ω, P).

a) Ergänze
$\Omega := \{1, ..., 6\}^2$
$P(A) :=$_____ $(A \epsilon P(\Omega))$. (2 Pkt.).

b) Betrachtet wird das Ereignis

$$B := \{(\omega_1, \omega_2) \epsilon \Omega | \omega_1 < \omega_2\}$$

Interpretiere das Ergebnis B. (2 Pkt.).

c) Bestimme die Anzahl der Elemente |B| von B.
|B| = _____
und die Wahrscheinlichkeit
P(B) = _____ . (2 Pkt).

1.3.2 Aufgabe 6

Sei $\Omega := \{-1, +1\}^2$. In der Tabelle wird ein W-Maß P auf Ω definiert.

	$\omega_2 = -1$	$\omega_2 = 1$
$\omega_1 = -1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$\omega_1 = 1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$

Für j=1,2 sei

$$X_j : \ \Omega \to \{-1, +1\}, \ X_j(\omega_1, \omega_2) := \omega_j$$

die j-te Projektion.

a) Bestimme die Verteilung P_{x1}und P_{x2} von X_1 und X_2. (2 Pkt.).
b) Bestimme E(X_1) und E(X_2). (2 Pkt.).
c) Bestimme E(X_1*X_2) und $K_{OV}(X_1, X_2)$. (2 Pkt.).