Aufgabe 1

Gegeben sei die Aussage „Für jede reelle Zahl a hat die Gleichung $x^2 = a$ eine reelle Lösung x."

2 Punkte a) Formulieren Sie die Aussage mit Hilfe von $\forall, \exists, \wedge, \vee, \neg$ und des Prädikats $G(x, a): \ x^2 = a$. Das zugrunde liegende Universum sei $\mathbb{R}$.

2 Punkte b) Bilden Sie formal (wie in a)) die Negation der Aussage.

2 Punkte c) Bilden Sie sprachlich die Negation der Aussage.
(Dabei sollen „nicht" (oder andere sprachliche Verneinungen) bzw. „$\neg$" nicht vor irgendwelchen Quantoren erscheinen.)

Aufgabe 2

3 + 3 Punkte Es seien $f: M \to N$ und $g: N \to M$ Abbildungen mit $g \circ f = \mathrm{id}_M$. Zeigen Sie: f ist injektiv und g ist surjektiv.
(Die Aussage steht im Kurs, sie soll nochmal gezeigt werden.)

Aufgabe 3

6 Punkte Zeigen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 4$ gilt $2^n < n!$.
($n!$ ist „n Fakultät".)

Aufgabe 4

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$.

3 Punkte a) Untersuchen Sie, ob M linear unabhängig ist. Wählen Sie im Fall linearer Abhängigkeit eine maximale Teilmenge linear unabhängiger Vektoren von M aus.

2 Punkte b) Untersuchen Sie, ob M ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$ ist. Wenn nicht, ergänzen Sie es zu einem Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^3$.

1 Punkt c) Untersuchen Sie, ob M eine Basis des $\mathbb{R}^3$ oder eines Untervektorraumes des $\mathbb{R}^3$ ist.

Aufgabe 5

Sei $f: V \to W$ eine lineare Abbildung zwischen reellen Vektorräumen V, W.

3 Punkte a) Zeigen Sie, dass $\operatorname{Kern} f$ ein Untervektorraum von V ist.

3 Punkte b) Beweisen Sie: f ist injektiv $\iff \operatorname{Kern} f = \{0\}$.
(Die Aussagen stehen im Kurs, sie sollen nochmal gezeigt werden.)

Aufgabe 6

6 Punkte Bestimmen Sie die Lösungsmenge des folgenden reellen linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 2 \\ -x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &= 5. \end{aligned}$$

Aufgabe 7

6 Punkte Es seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathrm{Mat}_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in \mathrm{Mat}_{n,m}(\mathbb{R})$ mit $BA = \mathbf{1}_n$. Zeigen Sie: $P := \mathbf{1}_m - 2AB$ ist invertierbar mit $P^{-1} = P$.