Aufgabe 1

Es seien M, N, X Mengen.

2 Punkte a) Wie ist $M \cap N$ definiert?

4 Punkte b) Es gelte $M \subset N \cup X$ und $M \cap X \subset N$. Beweisen Sie: $M \subset N$.

Aufgabe 2

6 Punkte Beweisen Sie: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^2 = (-1)^n \frac{n(n+1)}{2}.$$

Aufgabe 3

2 Punkte a) Es sei V ein reeller Vektorraum. Wann heißt eine Teilmenge U von V ein Untervektorraum von V?

b) Stellen Sie (mit Begründung) fest, welche der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) Untervektorräume des reellen Vektorraums $\mathbb{R}^n$ sind.

3 Punkte (1) $U_1 := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R},\ x_1^2 + x_2^2 = 0 \right\}$,

2 Punkte (2) $U_2 := \left\{ \begin{pmatrix} x+1 \\ x+2 \\ \vdots \\ x+n \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R} \right\}$.

Aufgabe 4

a) Es seien V ein reeller Vektorraum, $n \in \mathbb{N}$ und $v_1, \ldots, v_n \in V$ paarweise verschieden.

2 Punkte (1) Wann heißen die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig?

2 Punkte (2) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V?

2 Punkte (3) Wann heißt $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V?

b) Prüfen Sie (mit Begründung), ob die Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 8 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

2 Punkte (1) linear unabhängig sind,

2 Punkte (2) ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$ bilden,

2 Punkte (3) eine Basis von $\mathbb{R}^2$ bilden.

5 Punkte **Aufgabe 5**

Gegeben sei das reelle lineare Gleichungssystem

$$G \qquad \begin{aligned} 2x - 5y &= 0 \\ -4x + 10y &= 0 \ . \end{aligned}$$

in zwei Unbekannten. Bestimmen Sie (mit Begründung) eine Basis des Untervektorraumes $L(G)$ von $\mathbb{R}^2$.

Aufgabe 6

2 Punkte **a)** V und W seien reelle Vektorräume. Wann heißt eine Abbildung $f : V \longrightarrow W$ linear? Geben Sie die Definition oder eine äquivalente Bedingung an.

b) Welche der folgenden Abbildungen sind linear? Begründen Sie Ihre Antworten.

2 Punkte (1) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}, \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto x^2 + y^2,$

2 Punkte (2) $g : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ y-1 \end{pmatrix},$

3 Punkte (3) $h : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2, \ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} x+y \\ x-y \end{pmatrix}.$

Aufgabe 7

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ sei gegeben durch

$$f\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix} x_1 + 4x_2 + 7x_3 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \end{pmatrix} \text{ für alle } \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

(Sie brauchen *nicht* nachzuweisen, dass f linear ist.)

4 Punkte **a)** Bestimmen Sie eine Basis von $\operatorname{Kern} f$.

4 Punkte **b)** Bestimmen Sie $\operatorname{rang} f$ und eine Basis von $\operatorname{Bild} f$.

2 Punkte **c)** Untersuchen Sie f auf Injektivität und auf Surjektivität.