Mathematik für Informatiker I (Bachelor), WS 00/01
Klausur vom 17.02.2001:
Lösungshinweise zu den Klausuraufgaben

Aufgabe 1

(1) $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N},\ n \longmapsto f(n) := 2n - 1$ ist injektiv, denn aus $2n - 1 = 2m - 1$ mit $m, n \in \mathbb{N}$ folgt $2n = 2m$, also $n = m$.
f ist nicht surjektiv, denn für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist $2n - 1$ ungerade, also ist z. B. $2 \notin \operatorname{Bild} f$. Damit ist f auch nicht bijektiv.

(2) $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R},\ x \longmapsto g(x) := x^2 - 2x$ ist wegen $g(0) = 0 = g(2)$ nicht injektiv, also auch nicht bijektiv.
Wegen $g(x) = x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1 \geq -1$ ist z. B. $-2 \notin \operatorname{Bild} g$, also ist g nicht surjektiv.

Aufgabe 2

Wir zeigen

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion nach n.
Induktionsanfang $n = 1$: Es gilt

$$\sum_{k=1}^{1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{1}{1 \cdot 3} = \frac{1}{2 \cdot 1 + 1}.$$

Induktionsschritt $n \to n+1$: Sei $n \in \mathbb{N}$, es gelte

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} = \frac{n}{2n+1}. \qquad \text{(Induktionsvoraussetzung)}$$

Dann folgt

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(2k-1)(2k+1)} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} \qquad \text{[nach Induktionsvor.]} \\
&= \frac{n(2n+3)+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} \\
&= \frac{(n+1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2(n+1)+1}.
\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung durch vollständige Induktion bewiesen.

© 2001 Fernuniversität - Gesamthochschule in Hagen

Aufgabe 3

a) Sei V ein reeller Vektorraum. Nach Definition 4.3.1 heißt eine Teilmenge U von V *Untervektorraum* von V, wenn

U1 U nicht-leer ist,

U2 $u + u' \in U$ für alle $u, u' \in U$ gilt, und

U3 $au \in U$ für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $u \in U$ gilt.

b) (1) Die Menge $U_1 := \{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_2 \\ 1 \end{pmatrix} \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3$ ist nach Proposition 4.3.2 *kein Untervektorraum* von $\mathbb{R}^3$, da $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin U_1$ (wegen $1 \neq 0$).

(2) Die Menge $U_2 := \{ \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \mid x_1, x_2 \in \mathbb{R} \} \subset \mathbb{R}^3$ ist ein *Untervektorraum* von $\mathbb{R}^3$:

U1: Wegen $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0 \\ 0 \\ 0-0 \end{pmatrix}$ gilt $0_{\mathbb{R}^3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_2$, also ist U_2 nicht-leer.

U2: Für $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1' + x_2' \\ x_1' \\ x_1' - x_2' \end{pmatrix} \in U_2$ gilt

$$\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1' + x_2' \\ x_1' \\ x_1' - x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2) + (x_1' + x_2') \\ x_1 + x_1' \\ (x_1 - x_2) + (x_1' - x_2') \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (x_1 + x_1') + (x_2 + x_2') \\ x_1 + x_1' \\ (x_1 + x_1') - (x_2 + x_2') \end{pmatrix} \in U_2,$$

denn $x_1 + x_1', x_2 + x_2' \in \mathbb{R}$.

U3: Für $a \in \mathbb{R}$ und $\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix} \in U_2$ gilt

$$a\begin{pmatrix} x_1+x_2 \\ x_1 \\ x_1-x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a(x_1+x_2) \\ ax_1 \\ a(x_1-x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1+ax_2 \\ ax_1 \\ ax_1-ax_2 \end{pmatrix} \in U_2,$$

denn $ax_1, ax_2 \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 4

Wir lösen G nach y auf und erhalten $y = -\frac{3}{4}x$, also

$$L(G) = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R},\ 3x+4y=0\} = \{\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mid x, y \in \mathbb{R},\ y = -\tfrac{3}{4}x\}$$

$$= \{\begin{pmatrix} x \\ -\frac{3}{4}x \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\} = \{x\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix} \mid x \in \mathbb{R}\}$$

$$= \mathrm{Lin}(\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}).$$

Demnach bildet $\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$ eine Basis des Lösungsraumes $L(G)$ von G.

Aufgabe 5

a) (1) Nach Definition 5.3.1 heißen die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ *linear unabhängig*, wenn für alle $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ aus $a_1v_1 + \ldots + a_nv_n = 0$ notwendig $a_1 = \ldots = a_n$ folgt.
(2) Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ wird nach Definition 5.1.9 (a) genau dann als *Erzeugendensystem* von V bezeichnet, wenn $\mathrm{Lin}(\{v_1, \ldots, v_n\}) = V$ gilt.
(3) Eine Menge von Vektoren $\{v_1, \ldots, v_n\}$ heißt nach Definition 5.3.7 (b) *Basis* von V, wenn die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind und $\{v_1, \ldots, v_n\}$ ein Erzeugendensystem von V ist.

b) (1) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ sind *linear unabhängig*:

$$x_1\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ergibt $3x_1+5x_2 = 0$ und $4x_1+6x_2 = 0$, also (subtrahiere das Dreifache der zweiten Gleichung vom Vierfachen der ersten Gleichung) $2x_2 = 0$, das heißt $x_1 = x_2 = 0$.

(2) Die Vektoren $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ bilden eine *Basis* des $\mathbb{R}^2$:
Da diese Vektoren nach (1) linear unabhängig sind, gilt

$$\dim \operatorname{Lin}(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}) = 2,$$

also $\operatorname{Lin}(\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}) = \mathbb{R}^2$ nach Satz 5.5.1. Somit bilden die angegebenen Vektoren ein Erzeugendensystem und damit auch eine Basis von $\mathbb{R}^2$ (wegen der in (1) nachgewiesenen linearen Unabhängigkeit).

Aufgabe 6

a) Siehe 6.1.3.

b) $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ liegt genau dann im Kern von f, wenn $f(x) = 0$ ist und dies ist genau dann der Fall, wenn x Lösung des folgenden homogenen, linearen Gleichungssystems ist:

$$G \qquad \begin{aligned} 2x_1 \qquad\quad + \ x_3 &= 0 \\ x_1 + \ x_2 + \ x_3 &= 0\,. \\ x_1 + 3x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned}$$

Dieses lösen wir, indem wir zunächst die erste Gleichung nach x_3 auflösen und $x_3 = -2x_1$ erhalten. Einsetzen in die zweite Gleichung liefert $0 = x_1 + x_2 + x_3 = x_1 + x_2 - 2x_1 = -x_1 + x_2$ also $x_2 = x_1$. Damit besagt die dritte Gleichung $0 = x_1 + 3x_2 + 2x_3 = x_1 + 3x_1 - 4x_1 = 0$ und liefert damit keine weitere Bedingung an x.

Jedes $x = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} \in \operatorname{Kern} f$ hat damit notwendig die Gestalt $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_1\\-2x_1\end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$. Folglich ist $\operatorname{Kern} f \subset \operatorname{Lin}(\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix})$. (vgl. 5.1.7 c)).

Ist umgekehrt $a\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \in \operatorname{Lin}(\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix})$ beliebig, so zeigt Einsetzen in f, dass $f(a\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}) = 0$, also $a\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \in \operatorname{Kern} f$. Damit ist $\operatorname{Kern} f = \operatorname{Lin}(\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix})$ gezeigt.

Also erzeugt $\{\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}\}$ den Untervektorraum $\operatorname{Kern} f$ des $\mathbb{R}^3$ und da $\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} \neq 0$

ist, ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ linear unabhängig (5.3.3 a)) und somit $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$ insgesamt definitionsgemäß eine Basis von Kern f (vgl. 5.3.7).

Aufgabe 7

a) Siehe 7.5.1.

b) Siehe Aufgabe 7.5.4 (1) im Fall $p = n$ und die zugehörige Lösung L 7.11.