Lösungsskizzen zu den Klausuraufgaben zum Kurs 1142 Algorithmische Mathematik

1142KWL14

Aufgabe 1.

Die Folgen $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von natürlichen Zahlen F_n bzw. G_n seien rekursiv definiert durch

$$F_0 = 1, \qquad F_1 = 1, \qquad F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ falls } n \geq 2,$$

$$G_0 = 1, \qquad G_1 = 0, \qquad G_n = \sum_{k=0}^{n-2} G_k \text{ falls } n \geq 2.$$

1 Punkt (a) Berechnen Sie G_2 und G_3.

Lösungsvorschlag:

$$\begin{aligned} G_2 &= \sum_{k=0}^{0} G_k = G_0 = 1. \\ G_3 &= \sum_{k=0}^{1} G_k = G_0 + G_1 = 1 + 0 = 1. \end{aligned}$$

5 Punkte (b) Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt:

$$G_{n+2} = F_n.$$

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen die Behauptung per Induktion nach n. Für $n = 0$ und $n = 1$ folgt die Behauptung aus (a) und der Definition von F_0 und F_1. Sei nun $n \geq 2$ und die Behauptung bereits bewiesen für alle $k \in \mathbb{N}$ mit $0 \leq k \leq n-1$. Dann folgt aus der Induktionsvoraussetzung:

$$\begin{aligned} G_{n+2} &\overset{(1)}{=} \sum_{k=0}^{n} G_k \\ &= G_n + \sum_{k=0}^{n-1} G_k \\ &\overset{(1)}{=} G_n + G_{n+1} \\ &\overset{(IV)}{=} F_{n-2} + F_{n-1} \\ &\overset{(2)}{=} F_n. \end{aligned}$$

An den Stellen (1) haben wir die Definition von G_n und an der Stelle (2) die Definition von F_n für $n \geq 2$ ausgenutzt, bei (IV) haben wir die Induktionsvoraussetzung (für $n-1$ und $n-2$) eingesetzt.

Nach dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt also die Gültigkeit der Behauptung für alle $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 2.
In dieser Aufgabe geht es um Permutationen.

4 Punkte (a) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $N_k = \{1,2,3,\ldots,k\}$ die Menge aller natürlichen Zahlen im Intervall $[1,k]$. Sei $\mathscr{F}_k$ die Menge der bijektiven Funktionen mit Definitionsbereich N_k und Wertebereich N_k. Betrachten Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum auf der Menge

$$M = \mathscr{F}_1 \cup \mathscr{F}_2 \cup \mathscr{F}_3 \cup \mathscr{F}_4 \cup \mathscr{F}_5 \cup \mathscr{F}_6$$

mit Gleichverteilung auf den Elementen von M. Sei A das Ereignis, das aus allen Funktionen $f \in M$ besteht, für die es ein x aus dem Definitionsbereich von f gibt mit $f(x) \neq x$.

Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A.

Lösungsvorschlag:

Die Grundmenge besteht aus allen Permutationen der Längen 1, 2, 3, 4, 5, und 6, hat also die Größe

$$|M| = \sum_{k=1}^{6} |\mathscr{F}_k| = \sum_{k=1}^{6} k! = 1+2+6+24+120+720 = 873.$$

Das Ereignis A besteht aus allen Permutationen, die keine identische Permutation sind. Es gibt genau 6 identische Permutationen in M, eine für jede Länge k, $1 \leq k \leq 6$. Damit ergibt sich als Größe von A der Wert

$$|A| = |M| - \left|\overline{A}\right| = 873 - 6 = 867.$$

Somit beträgt die gesuchte Wahrscheinlichkeit

$$p(A) = \frac{|A|}{|M|} = \frac{867}{873} = \frac{289}{291}.$$

3 Punkte (b) Zerlegen Sie die Permutation

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 & 14 \\ 5 & 6 & 9 & 11 & 8 & 13 & 14 & 3 & 10 & 7 & 4 & 2 & 12 & 1 \end{pmatrix}$$

in disjunkte Zyklen.

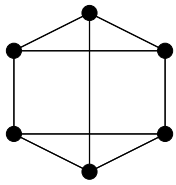
Lösungsvorschlag:

Man kann die gegebene Permutation wie folgt in Zyklen zerlegen:

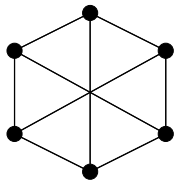
$$\langle 1,5,8,3,9,10,7,14\rangle\langle 2,6,13,12\rangle\langle 4,11\rangle$$

4 Punkte **Aufgabe 3.**

Zeigen oder widerlegen Sie: Die unten abgebildeten Graphen G_1 und G_2 sind isomorph.



G_1



G_2

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass G_1 und G_2 nicht isomorph sind.

1. Beweismöglichkeit:

Der Graph G_1 enthält einen Kreis der Länge 3, der Graph G_2 (ist isomorph zum vollständigen bipartiten Graphen $K_{3,3}$ und) enthält (als bipartiter Graph somit) keinen Kreis der Länge 3. Daher können G_1 und G_2 nicht isomorph sein.

2. Beweismöglichkeit:

Löscht man in G_1 den obersten Knoten bzw. in G_2 einen beliebigen Knoten v, so entstehen Graphen G_1' bzw. G_2' mit jeweils genau zwei Knoten vom Grad 3. Diese sind in G_1' benachbart, in G_2' nicht. Also sind G_1' und G_2' nicht isomorph, und da die Wahl von v beliebig war, können folglich auch G_1 und G_2 nicht isomorph sein.

3. Beweismöglichkeit:

Löscht man in G_1 den obersten Knoten, so entsteht ein Graph G_1', der einen Kreis der Länge 3 enthält. Löscht man in G_2 einen beliebigen Knoten v, so entsteht ein Graph G_2', der (isomorph zum vollständigen bipartiten Graphen $K_{2,3}$ ist und somit) keinen Kreis der Länge 3 enthält. Also sind G_1' und G_2' nicht isomorph, und da die Wahl von v beliebig war, können folglich auch G_1 und G_2 nicht isomorph sein.

4. Beweismöglichkeit:

Löscht man in G_1 den obersten Knoten, so entsteht ein Graph G_1', der einen Kreis der Länge 5, also einen Hamiltonkreis, enthält. Löscht man in G_2 einen beliebigen Knoten v, so entsteht ein Graph G_2', der bipartit ist und ungerade Knotenanzahl hat und somit keinen Hamiltonkreis enthält. Also sind G_1' und G_2' nicht isomorph, und da die Wahl von v beliebig war, können folglich auch G_1 und G_2 nicht isomorph sein.

5. Beweismöglichkeit:

Löscht man in G_1 den obersten Knoten und den Knoten oben rechts, welches benachbarte Knoten sind, so entsteht ein Graph G_1' mit Valenzsequenz $(3,2,2,1)$. Löscht man in G_2 zwei beliebige benachbarte Knoten v und w, so entsteht ein Graph G_2', der isomorph zum C_4 ist und somit Valenzsequenz $(2,2,2,2)$ hat. Da G_1' und G_2' unterschiedliche Valenzsequenzen haben, sind sie nicht isomorph. Da die Wahl des Paares $\{v,w\}$ von benachbarten Knoten beliebig war, können folglich auch G_1 und G_2 nicht isomorph sein.

Aufgabe 4.

6 Punkte (a) Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt einen Graphen mit genau 11 Knoten, von denen acht den Grad 3 und drei den Grad 4 haben.

Geben Sie, falls möglich, einen solchen Graphen explizit an.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass es einen solchen Graphen, d.h. einen Graphen mit Valenzsequenz $(4,4,4,3,3,3,3,3,3,3,3)$ gibt und konstruieren einen solchen explizit.

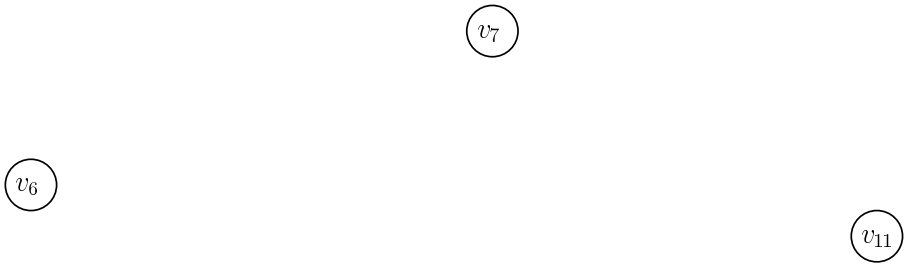
Wir benutzen das Verfahren nach Havel und Hakimi.

v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}
4	4	4	3	3	3	3	3	3	3	3
	3	3	2	2	3	3	3	3	3	3
	v_2	v_3	v_6	v_7	v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_4	v_5
	3	3	3	3	3	3	3	3	2	2
		2	2	2	3	3	3	3	2	2
		v_8	v_9	v_{10}	v_{11}	v_3	v_6	v_7	v_4	v_5
		3	3	3	3	2	2	2	2	2
			2	2	2	2	2	2	2	2
				1	1	2	2	2	2	2
				v_3	v_6	v_7	v_4	v_5	v_{10}	v_{11}
				2	2	2	2	2	1	1
					1	1	2	2	1	1
					v_4	v_5	v_6	v_7	v_{10}	v_{11}
					2	2	1	1	1	1
						1	0	1	1	1
						v_5	v_7	v_{10}	v_{11}	v_6
						1	1	1	1	0
							0	1	1	0
							v_{10}	v_{11}	v_7	v_6
							1	1	0	0
								0	0	0

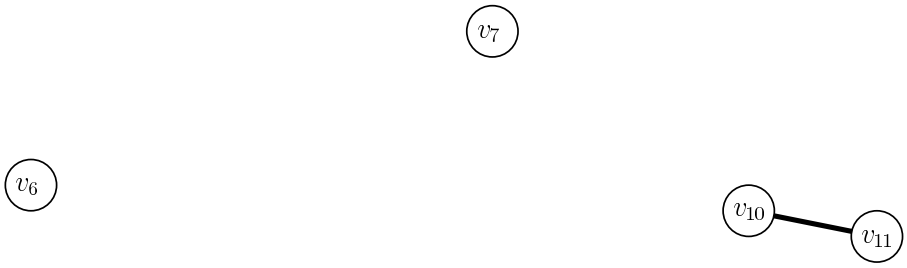
Da es einen Graphen mit 3 isolierten Knoten gibt, gibt es somit nach dem Satz zum Verfahren von Havel und Hakimi auch einen Graphen mit Valenzsequenz $(4,4,4,3,3,3,3,3,3,3,3)$.

Wenden wir das Verfahren von Havel und Hakimi rückwärts an, so lässt sich ein solcher Graph konstruieren. Wir starten mit drei isolierten Knoten und fügen dann immer Knoten hinzu.

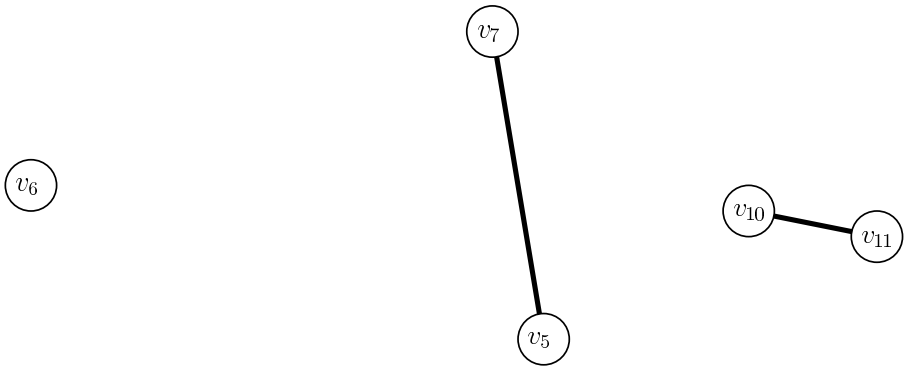
1. Schritt:



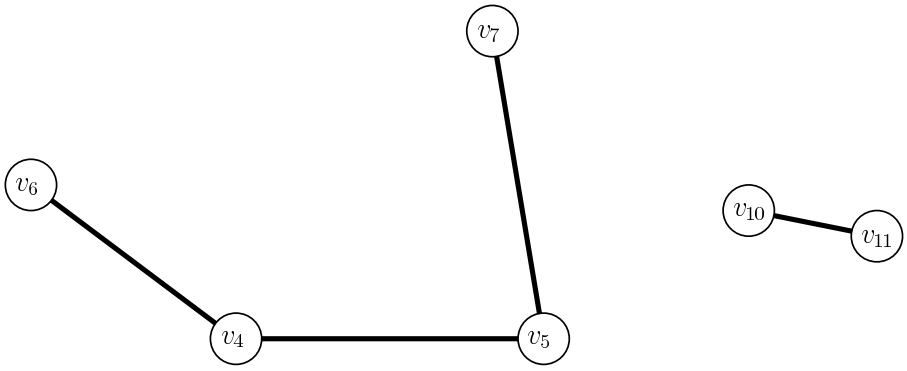
2. Schritt:



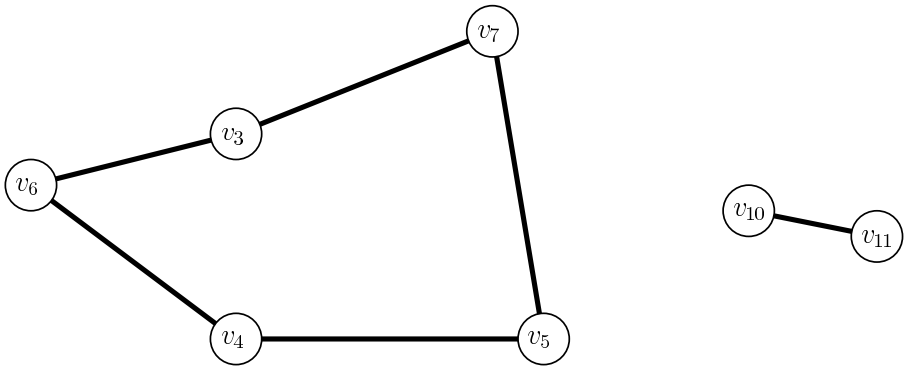
3. Schritt:



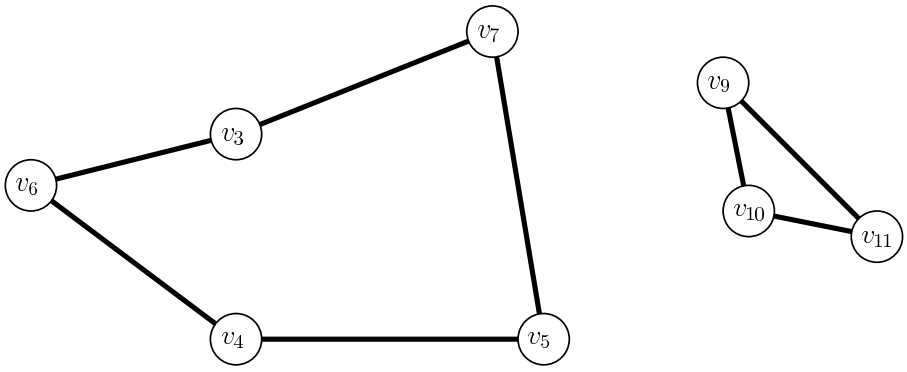
4. Schritt:



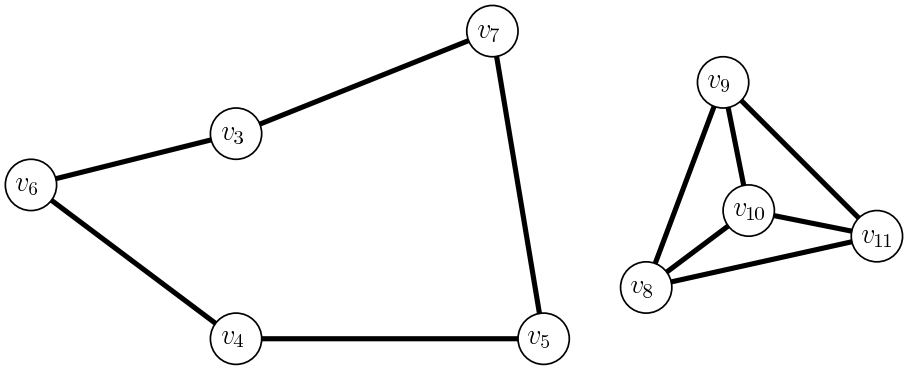
5. Schritt:



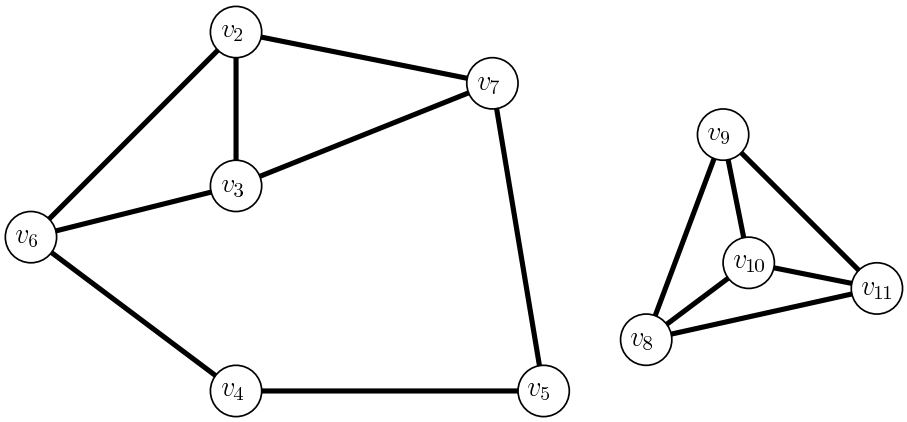
6. Schritt:



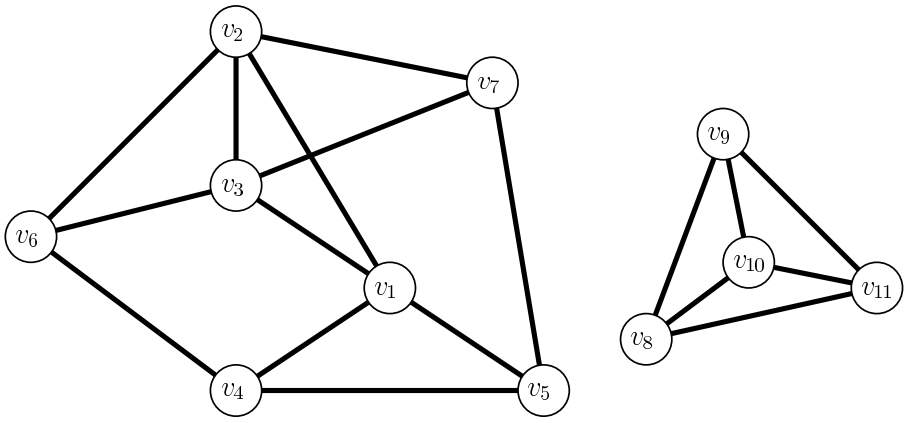
7. Schritt:



8. Schritt:



9. Schritt:



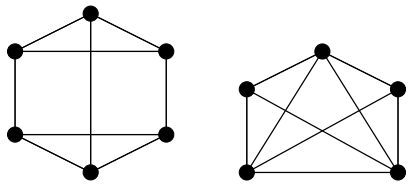
Der Graph aus dem 9. Schritt hat die geforderte Eigenschaft.

3 Punkte (b) Zeigen oder widerlegen Sie: Es gibt einen weiteren Graphen mit genau 11 Knoten, von denen acht den Grad 3 und drei den Grad 4 haben, der nicht isomorph zu Ihrem Beispielgraph aus (a) ist.

Lösungsvorschlag:

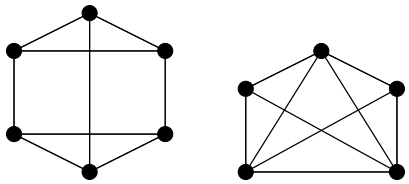
Wir zeigen, dass es mindestens zwei nichtisomorphe Graphen mit der Valenzsequenz gibt.

Neben dem Beispiel in (a) kann man einen weiteren Graphen etwa unter Benutzung von einem der Graphen G_1 bzw. G_2 aus Aufgabe 3 konstruieren. Ein Beispiel hierfür ist der folgende Graph.

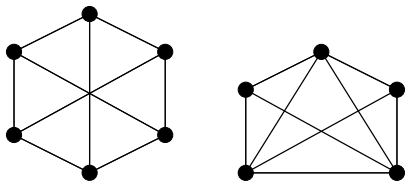


Dieser Graph hat Komponenten der Größen 6 und 5, der Graph aus (a) hat Komponenten der Größen 7 und 4, somit sind diese beiden Graphen auch nicht isomorph.

Kurze gemeinsame Lösung von (a) und (b) zusammen:
Der folgende Graph H_1



und der folgende Graph H_2



haben offenbar die geforderte Valenzsequenz. Sie sind nicht isomorph, denn jeder Isomorphismus von H_1 nach H_2 müsste die Komponente mit 6 Knoten von H_1, d.h. den Graphen G_1 aus Aufgabe 3, auf die Komponente mit 6 Knoten von H_2, d.h. den Graphen G_2 aus Aufgabe 3, isomorph abbilden. Ein solcher Isomorphismus existiert aber nach dem Ergebnis aus der Lösung zu Aufgabe 3 nicht.

Aufgabe 5.

Entscheiden Sie, ob folgende Zeichenketten Code eines Baumes sind. Begründen Sie Ihre Aussagen.

Falls die Zeichenketten Code eines Baumes sind, geben Sie einen Baum mit dem entsprechenden Code an.

3 Punkte (a) (((( ) (( ) ( ))) ( ) (( ))) (( ) ( ) ( )))

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass der Code nicht Code eines Baumes ist.

1. Beweismöglichkeit:

Der Teil des Codes von der dritten bis zur zwölften Klammer lautet

(( ) (( ) ( ))).

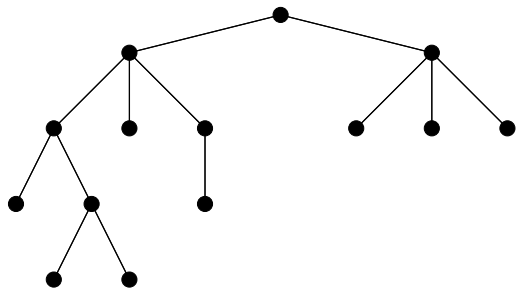
Dies ist ein wohlgeklammerter Teilcode, er ist jedoch nicht lexikographisch sortiert, da

$( ) \not\preceq (( ) ( ))$

ist. Somit handelt es sich nicht um den Code eines Baumes.

2. Beweismöglichkeit:

Der Code ist wohlgeklammert, somit ist er Code eines gepflanzten Baumes, nämlich des folgenden:



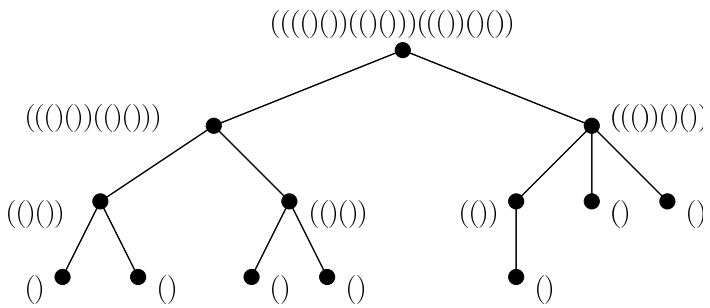
Dieser Baum ist nicht korrekt gewurzelt. Somit ist der Code nicht Code eines Baumes.

4 Punkte (b) (((( ) ( )) (( ) ( ))) ((( )) ( ) ( )))

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass der Code Code eines Baumes ist.

Der Code ist wohlgeklammert. Der zugehörige gepflanzte Baum ist der folgende:



Der Code ist lexikographisch sortiert, wie man leicht sieht:

$(( )) \preceq ()$

$((( ) ( )) (( ) ( ))) \preceq ((( )) ( ) ( ))$

Ferner ist der obige gepflanzte Baum richtig gewurzelt, denn das Zentrum ist hier die Menge aller Knoten mit Exzentrizität 3, diese Menge ist einelementig und besteht nur aus dem Wurzelknoten.

Somit handelt es sich um den Code eines Baumes.

Aufgabe 6.

Gegeben seien drei Männer A, B und C sowie drei Frauen 1, 2 und 3. Sie haben unterschiedliche Präferenzen bezüglich eines Partners des anderen Geschlechts. Die Präferenzlisten sind wie folgt:

A:	(1,2,3)	1:	(B,C,A)
B:	(2,3,1)	2:	(C,A,B)
C:	(1,3,2)	3:	(B,A,C)

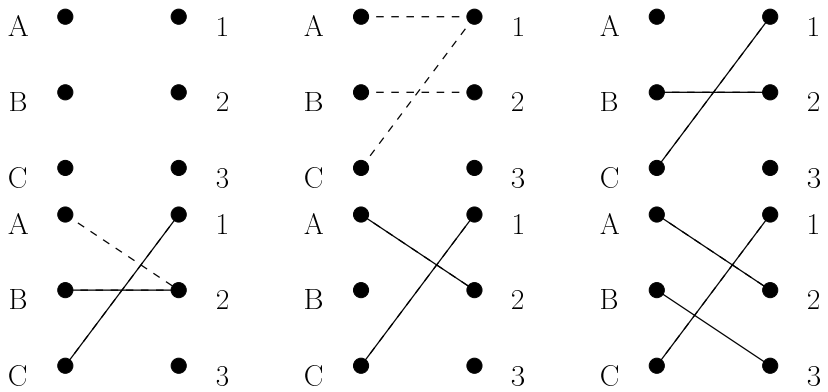
Dabei bezeichne der linke Eintrag eines Tripels jeweils den liebsten Partner, der mittlere den zweitliebsten und der rechte den drittliebsten.

4 Punkte (a) Bestimmen Sie eine stabile Hochzeit. Begründen Sie Ihre Vorgehensweise.

Lösungsvorschlag:

Mit dem Algorithmus Men-Propose-Women-Dispose bestimmen wir eine stabile Hochzeit. Die einzelnen Schritte des Algorithmus sind unten abgebildet.

— A macht 1 einen Antrag und verlobt sich mit ihr.
— B macht 2 einen Antrag und verlobt sich mit ihr.
— C macht 1 einen Antrag.
— 1 löst die Verlobung mit A, da sie C lieber mag als A, und verlobt sich mit C.
— A macht 2 einen Antrag.
— 2 löst die Verlobung mit B, da sie A lieber mag als B, und verlobt sich mit A.
— B macht 3 einen Antrag und verlobt sich mit ihr.

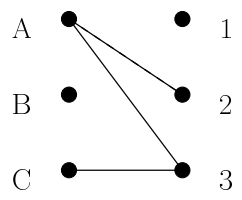


Bei dem perfekten Matching aus dem letzten Schritt handelt es sich um eine stabile Hochzeit

2 Punkte (b) Der Graph $G_0 = (V,E)$ sei definiert durch $V = U \cup W$ mit $U = \{\mathrm{A},\mathrm{B},\mathrm{C}\}$ und $W = \{1,2,3\}$, und E bestehe aus all den Paaren $\{u,w\}$ mit $u \in U$ und $w \in W$, für die weder der Mann u die Frau w am liebsten mag noch die Frau w den Mann u am liebsten mag (gemäß obigen Präferenzlisten).

Stellen Sie den Graphen grafisch dar.

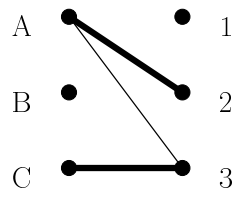
Lösungsvorschlag:



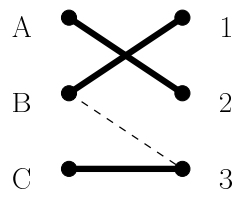
6 Punkte (c) Bestimmen Sie ein maximales Matching von G_0 und beweisen Sie dessen Maximalität. Können Sie dieses Matching zu einer stabilen Hochzeit ergänzen?

Lösungsvorschlag:

Das einzige maximale Matching in G_0 besteht offenbar aus den Kanten $(\mathrm{A},2)$ und $(\mathrm{C},3)$, da jede andere Teilmenge von zwei oder drei Kanten einen Knoten gemeinsam hätte.



Die einzige Art, es zu einem perfekten Matching zu ergänzen, ist es, die Kante $(\mathrm{B},1)$ hinzuzunehmen.



Dieses perfekte Matching ist jedoch keine stabile Hochzeit, da das Paar $(\mathrm{B},3)$ instabil ist, denn B mag 3 lieber als seine Partnerin 1 und 3 mag B lieber als ihren Partner C. Somit ist es nicht möglich, das maximale Matching zu einer stabilen Hochzeit zu ergänzen.

5 Punkte **Aufgabe 7.**

Schreiben Sie die Dezimalzahl $88,8_{(10)}$ ins 2er-System (d.h. Binärsystem) um.

Lösungsvorschlag:

$$
\begin{array}{rcrcrcrcl}
88\frac{4}{5} & : & 64 & & & & & = & 1 \text{ Rest } 24\frac{4}{5} \\
24\frac{4}{5} & : & 32 & & & & & = & 0 \text{ Rest } 24\frac{4}{5} \\
24\frac{4}{5} & : & 16 & & & & & = & 1 \text{ Rest } 8\frac{4}{5} \\
8\frac{4}{5} & : & 8 & & & & & = & 1 \text{ Rest } \frac{4}{5} \\
\frac{4}{5} & : & 4 & & & & & = & 0 \text{ Rest } \frac{4}{5} \\
\frac{4}{5} & : & 2 & & & & & = & 0 \text{ Rest } \frac{4}{5} \\
\frac{4}{5} & : & 1 & & & & & = & 0 \text{ Rest } \frac{4}{5} \\
\frac{4}{5} & : & \frac{1}{2} & = & \frac{8}{10} & : & \frac{5}{10} & = & 1 \text{ Rest } \frac{3}{10} \\
\frac{3}{10} & : & \frac{1}{4} & = & \frac{6}{20} & : & \frac{5}{20} & = & 1 \text{ Rest } \frac{1}{20} \\
\frac{1}{20} & : & \frac{1}{8} & = & \frac{2}{40} & : & \frac{5}{40} & = & 0 \text{ Rest } \frac{2}{40} \\
\frac{2}{40} & : & \frac{1}{16} & = & \frac{4}{80} & : & \frac{5}{80} & = & 0 \text{ Rest } \frac{4}{80} \qquad \frac{4}{80} = \frac{1}{16} \cdot \frac{4}{5}
\end{array}
$$

Es folgt:

$$88,8_{(10)} = 1011000,\overline{1100}_{(2)}.$$

Aufgabe 8.

Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & 15 & -9 \\ 6 & 25 & 40 \end{pmatrix}.$$

und der Vektor $b = (-2, 8, 28)^\top$.

4 Punkte (a) Bestimmen Sie eine LU-Zerlegung von A.

Lösungsvorschlag:

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & 15 & -9 \\ 6 & 25 & 40 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 2 & -1 & -21 \\ 3 & 1 & 22 \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 2 & -1 & -21 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Somit lautet eine LU-Zerlegung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & 15 & -9 \\ 6 & 25 & 40 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 0 & -1 & -21 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{U}$$

3 Punkte (b) Zeigen Sie, dass A regulär ist und für die Inverse A^{-1} von A gilt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{825}{2} & 85 & 81 \\ 107 & -22 & -21 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit:

A ist regulär nach (a) als Produkt der beiden offensichtlich regulären Matrizen L und U. Wegen $A = LU$ ist

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1}.$$

Die Inverse L^{-1} von L lässt sich sehr leicht bestimmen. Nach dem Satz über die Dreieckszerlegung ist nämlich $L = G_1G_2$ das Produkt der beiden Frobeniusmatrizen

$$G_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$G_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Nach Bemerkung 5.5.9 gilt für deren Inversen:

$$G_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$G_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Somit ist

$$L^{-1} = G_2^{-1}G_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Die Inverse von U berechnen wir wie folgt:

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 8 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -21 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 8 & 0 & 1 & 0 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 0 & 0 & 1 & 8 & 162 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 4 & 81 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Somit ist

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 81 \\ 0 & -1 & -21 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und

$$A^{-1} = U^{-1}L^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 4 & 81 \\ 0 & -1 & -21 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{825}{2} & 85 & 81 \\ 107 & -22 & -21 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Lösungsmöglichkeit:

A ist regulär nach (a) als Produkt der beiden offensichtlich regulären Matrizen L und U. Die Inverse von A berechnen wir wie folgt:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 8 & 6 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 15 & -9 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 25 & 40 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 3 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -21 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 22 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -81 & -\frac{15}{2} & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 21 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{825}{2} & 85 & 81 \\ 0 & 1 & 0 & 107 & -22 & -21 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Somit lautet

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{825}{2} & 85 & 81 \\ 107 & -22 & -21 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

wie behauptet.

3. Lösungsmöglichkeit:

A ist regulär nach (a) als Produkt der beiden offensichtlich regulären Matrizen L und U. Wegen

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 8 & 6 \\ 4 & 15 & -9 \\ 6 & 25 & 40 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} -\frac{825}{2} & 85 & 81 \\ 107 & -22 & -21 \\ -5 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

lautet A^{-1} wie behauptet.

2 Punkte (c) Bestimmen Sie $\|A\|_1$ und $\|A\|_\infty$ und die Konditionszahl von A bezüglich der Spaltensummennorm und bezüglich der Zeilensummennorm.

Lösungsvorschlag:

Für die Spaltensummennorm berechnen wir:

$$\begin{aligned} \|A\|_1 &= \max\{2+4+6, 8+15+25, 6+|-9|+40\} = \max\{12, 48, 55\} = 55, \\ \left\|A^{-1}\right\|_1 &= \max\{|-412.5|+107+|-5|, 85+|-22|+1, 81+|-21|+1\} \\ &= \max\{524.5, 108, 103\} = 524.5, \\ \operatorname{cond}_1(A) &= \|A\|_1 \left\|A^{-1}\right\|_1 = 55 \cdot 524.5 = 28847.5 = \frac{57695}{2}. \end{aligned}$$

Für die Spaltensummennorm berechnen wir:

$$\begin{aligned} \|A\|_\infty &= \max\{2+8+6, 4+15+|-9|, 6+25+40\} = \max\{16, 28, 71\} = 71, \\ \left\|A^{-1}\right\|_\infty &= \max\{|-412.5|+85+81, 107+|-22|+|-21|, |-5|+1+1\} \\ &= \max\{578.5, 150, 7\} = 578.5, \\ \operatorname{cond}_\infty(A) &= \|A\|_\infty \left\|A^{-1}\right\|_\infty = 71 \cdot 578.5 = 41073.5 = \frac{82147}{2}. \end{aligned}$$

Aufgabe 9.

Ein Student lernt für zwei Klausuren. Er will genau 4 Stunden lang lernen. Er weiß, dass er die 20 Punkte Mindestpunktzahl bei der leichten Klausur auf jeden Fall schafft. Wenn s die Zeit (in Stunden) ist, die der Student für die leichte Klausur lernt, dann kann er erwarten, bei dieser Klausur zusätzliche $\frac{20s}{s+1}$ Punkte zu erzielen. Bei der schweren Klausur dagegen ist sein Kenntnisstand gleich null. Lernt er t Stunden für die schwere Klausur, so kann er $\frac{80t}{t+1}$ Punkte bei dieser Klausur erwarten. Er möchte diese Klausur aber auf jeden Fall schaffen, dazu braucht er 40 Punkte. Der Student möchte einen Zeitplan aufstellen, um die Gesamtpunktzahl aus beiden Klausuren zu maximieren und alle seine Ziele zu erreichen.

5 Punkte (a) Modellieren Sie das Problem als Optimierungsproblem.

Lösungsvorschlag:

Sei s die Lernzeit in Stunden für die leichte Klausur und t die Lernzeit in Stunden für die schwere Klausur.

Die zu maximierende Zielfunktion lautet

$$f(s,t) = 20 + \frac{20s}{s+1} + \frac{80t}{t+1}.$$

Da die Lernzeit jeweils nicht negativ sein kann, haben wir

$$s,t \geq 0,$$

und da die Summe der Lernzeiten exakt 4 beträgt haben wir

$$s+t = 4.$$

Wegen der Mindestpunktzahl in der schweren Klausur haben wir

$$\frac{80t}{t+1} \geq 40,$$

was äquivalent zu $80t \geq 40t + 40$ bzw. $40t \geq 40$ bzw.

$$t \geq 1$$

ist. Damit ist die Bedingung $t \geq 0$ redundant. Insgesamt lautet das Problem

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min & -20 & - & 20\dfrac{s}{s+1} & - & 80\dfrac{t}{t+1} & & \\ & & & s & & & \geq & 0 \\ & & & s & + & t & = & 4 \\ & & & & & t & \geq & 1. \end{array}$$

8 Punkte (b) Bestimmen Sie eine Optimallösung des Problems.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit: Substitution

Mittels der Substitution $s = 4 - t$ vereinfacht sicht das Problem zu

$$\begin{array}{lrcrcrcl} \min & -20 & - & 20\dfrac{4-t}{5-t} & - & 20\dfrac{4t}{t+1} & & \\ & & & & & t & \leq & 4 \\ & & & & & t & \geq & 1. \end{array}$$

Wir ignorieren vorerst die Nebenbedingungen und bestimmen alle lokalen Minima der Funktion

$$f(t) := -20\left(1 + \frac{4-t}{5-t} + \frac{4t}{t+1}\right)$$

im Intervall $]1.4[$. Dazu berechnen wir

$$f'(t) := -20\left(\frac{-1}{(5-t)^2} + \frac{4}{(t+1)^2}\right)$$

und

$$f''(t) := -20\left(\frac{-2}{(5-t)^3} + \frac{-8}{(t+1)^3}\right).$$

Es ist $f'(t) = 0$ genau dann, wenn

$$\frac{1}{(5-t)^2} = \frac{4}{(t+1)^2},$$

d.h. wenn

$$4(5-t)^2 = (t+1)^2,$$

d.h. wenn

$$100 - 40t + 4t^2 = t^2 + 2t + 1,$$

d.h. wenn

$$99 - 42t + 3t^2 = 0,$$

d.h. wenn

$$t^2 - 14t + 33 = 0,$$

d.h. wenn

$$t \in \{7 \pm \sqrt{49-33}\} \in \{3, 11\}.$$

Somit liegt bei $t = 3$ ein Kandidat für ein lokales Extremum vor, wegen $f''(3) = 7.5 > 0$ handelt es sich um ein lokales Mimimum mit Funktionswert $f(3) = -90$. Wegen $f(1) = -75$ und $f(4) = -84$ handelt es sich um das einzige globale Minimum von f im Intervall $[1,4]$.

Somit lautet die Lösung unseres ursprünglichen Problems $(s,t) = (1,3)$, d.h. der Student sollte eine Stunde für die leichte Klausur lernen und 3 Stunden für die schwere Klausur und erzielt dabei die optimale Gesamtpunktzahl von 90 Punkten.

2. Lösungsmöglichkeit: Kuhn-Tucker-Bedingungen

Wir definieren die Funktionen

$$\begin{aligned} f(s,t) &:= -20 - \frac{20s}{s+1} - \frac{80t}{t+1}, \\ h(s,t) &:= s + t - 4, \\ g_1(s,t) &:= -s, \\ g_2(s,t) &:= -t + 1. \end{aligned}$$

Unser Problem lautet dann

$$\min f(s,t) \quad \text{unter} \quad h(s,t) = 0,\ g_i(s,t) \le 0,\ i = 1,2.$$

Wir berechnen zunächst die Gradienten und Hessematrizen der obigen Funktionen.

$$\begin{aligned}
\nabla f(s,t) &:= \left(-\frac{20}{(s+1)^2}, -\frac{80}{(t+1)^2}\right),\\
\nabla h(s,t) &:= (1,1),\\
\nabla g_1(s,t) &:= (-1,0),\\
\nabla g_2(s,t) &:= (0,-1),\\
\nabla^2 f(s,t) &:= \begin{pmatrix} \frac{40}{(s+1)^3} & 0 \\ 0 & \frac{160}{(t+1)^3} \end{pmatrix},\\
\nabla^2 h(s,t) &:= 0,\\
\nabla^2 g_1(s,t) &:= 0.\\
\nabla^2 g_2(s,t) &:= 0.
\end{aligned}$$

Je zwei der Gradienten von h, g_1 und g_2 sind linear unabhängig. Die Nebenbedingungen, in denen g_1 und g_2 vorkommen, können niemals gleichzeitig aktiv sein, wenn $s+t=4$ gilt. Damit sind alle zulässigen Punkte reguläre Punkte der Nebenbedingungen.

Daher ist eine notwendige Bedingung dafür, dass an der Stelle (s,t) ein Minimum vorliegt, dass es $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mu_1, \mu_2 \leq 0$ gibt mit

$$\begin{array}{rclcl}
-\frac{20}{(s+1)^2} & = & \lambda & - & \mu_1 \\
-\frac{80}{(t+1)^2} & = & \lambda & & - \ \mu_2
\end{array}$$

Wir unterscheiden 4 Fälle.

Fall 1: $\mu_1 = \mu_2 = 0$.

Dann folgt aus den Kuhn-Tucker-Bedingungen, dass

$$-\frac{20}{(s+1)^2} = \lambda = -\frac{80}{(t+1)^2}$$

gilt, also

$$(t+1)^2 = 4(s+1)^2. \tag{1}$$

Aus der Gleichungnebenbedingung folgt $s = 4-t$. Setzen wir dies in (1) ein, so erhalten wir

$$(t+1)^2 = 4(5-t)^2,$$

d.h.

$$t^2 + 2t + 1 = 4t^2 - 40t + 100,$$

d.h.

$$3t^2 - 42t + 99 = 0,$$

d.h.

$$t^2 - 14t + 33 = 0,$$

also $t \in \{3, 11\}$. Da von diesen beiden Werten nur der Kandidat 3 im zulässigen Bereich liegt, erhalten wir also nur als Kandidat fuer eine Minimalstelle $(s,t) = (1,3)$.

Da $\nabla^2 f(1,3)$ positiv definit ist, liegt tatsächlich an der Stelle $(1,3)$ ein lokales Minimum.

Fall 2: $\mu_1 \neq 0,\ \mu_2 = 0$.

Dann ist die erste Ungleichungsnebenbedingung aktiv, d.h. es gilt $s = 0$. Aus der Gleichungsnebenbedingung folgt dann $t = 4$. Setzen wir dies in die Kuhn-Tucker-Bedingungen ein, erhalten wir

$$-20 = \lambda - \mu_1, \quad -\frac{16}{5} = \lambda,$$

also

$$\mu_1 = 20 + \lambda = 20 - \frac{16}{5} > 0,$$

was ein Widerspruch ist.

Fall 3: $\mu_1 = 0,\ \mu_2 \neq 0$.

Dann ist die zweite Ungleichungsnebenbedingung aktiv, d.h. es gilt $t = 1$. Aus der Gleichungsnebenbedingung folgt dann $s = 3$. Setzen wir dies in die Kuhn-Tucker-Bedingungen ein, erhalten wir

$$-\frac{5}{4} = \lambda, \quad -20 = \lambda - \mu_2,$$

also

$$\mu_2 = 20 + \lambda = 20 - \frac{5}{4} > 0,$$

was ein Widerspruch ist.

Fall 4: $\mu_1 \neq 0,\ \mu_2 \neq 0$.

Dann sind beide Ungleichungsnebenbedingungen aktiv, was nicht sein kann, wie wir eben schon argumentiert haben.

Wir haben also nur ein lokales Minimum, nämlich $(1,3)$, im Zulässigkeitsbereich gefunden. Da dieser als Strecke kompakt ist, handelt es sich um ein globales Minimum des Optimierungsproblems.

7 Punkte **Aufgabe 10.**

Sei $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) := 2x^2 + 5y^2 - 2xy + x - 70000y + 3.$$

Zeigen oder widerlegen Sie: f ist konvex.

Lösungsvorschlag:

Wir zeigen, dass f konvex ist.

Beweis: f ist zweimal stetig differenzierbar mit Hessematrix

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix}.$$

Eine Cholesky-Faktorisierung von H existiert, sie lautet nämlich

$$H = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 10 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{pmatrix},$$

somit ist H positiv definit und f strikt konvex.

2 Punkte **Aufgabe 11.**

Geben Sie eine mathematisch exakte Definition dafür an, was es bedeutet, dass eine Funktion $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ strikt unimodal auf $[a,b]$ ist.

Lösungsvorschlag:

Eine Funktion $f: [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ heißt *strikt unimodal* auf $[a,b]$, wenn sie genau ein lokales Minimum in $[a,b]$ besitzt.

9 Punkte **Aufgabe 12.**

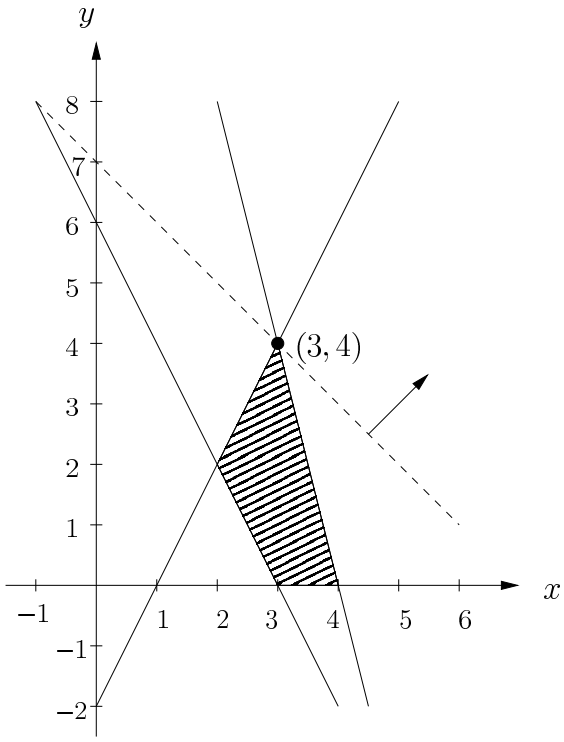
Lösen Sie das folgende lineare Optimierungsproblem:

$$\begin{array}{lrcrcl} \max & x & + & y & & \\ \text{unter} & 4x & + & y & \leq & 16 \\ & 2x & + & y & \geq & 6 \\ & 2x & - & y & \geq & 2 \\ & & & x,y & \geq & 0 \end{array}$$

Tipps: Grafische Lösung ist zulässig. Bei Benutzung von Blands Rule tauchen in unseren Rechnungen im Simplextableau keine Nenner größer als 6 auf.

Lösungsvorschlag:

1. Lösungsmöglichkeit: Graphische Lösung



Wir lesen die Optimallösung $(3,4)$ ab und errechnen den optimalen Zielfunktionswert als $3+4=7$.

2. Lösungsmöglichkeit: Simplexverfahren

Das Starttableau für das Hilfsproblem für Phase I lautet wie folgt:

$$\begin{array}{rrrrr|rr|r}
4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 8 \\
\hline
1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
4 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \\
2 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 6 \\
\boxed{2} & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 2
\end{array}$$

Der erste Pivotschritt ergibt:

$$\begin{array}{rrrrr|rr|r}
0 & 2 & 0 & -1 & 1 & 0 & -2 & 4 \\
\hline
0 & \frac{3}{2} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -1 \\
\hline
0 & 3 & 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & 12 \\
0 & \boxed{2} & 0 & -1 & 1 & 1 & -1 & 4 \\
1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1
\end{array}$$

Der zweite Pivotschritt ergibt:

$$\begin{array}{rrrrr|rr|r}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{3}{4} & \frac{1}{4} & -4 \\
\hline
0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} & -\frac{1}{2} & 6 \\
0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 2 \\
1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & 2
\end{array}$$

Damit ist eine zulässige Lösung, nämlich $(x,y) = (2,2)$, gefunden und Phase I beendet. Wir streichen die künstliche Zielfunktion und die Spalten der künstlichen Schlupfvariablen und erhalten als Starttableau für Phase II:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
0 & 0 & 0 & \frac{3}{4} & -\frac{1}{4} & -4 \\
\hline
0 & 0 & 1 & \boxed{\frac{3}{2}} & \frac{1}{2} & 6 \\
0 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 2 \\
1 & 0 & 0 & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 2
\end{array}$$

Der Pivotschritt ergibt:

$$\begin{array}{rrrrr|r}
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & -7 \\
\hline
0 & 0 & \frac{2}{3} & 1 & \frac{1}{3} & 4 \\
0 & 1 & \frac{1}{3} & 0 & \frac{2}{3} & 4 \\
1 & 0 & \frac{1}{6} & 0 & -\frac{1}{6} & 3
\end{array}$$

Das Tableau ist final. Wir lesen die Optimallösung $(3,4)$ mit Zielfunktionswert 7 ab.