Mathematische Grundlagen (01141) SoSe 2013

Klausur am 21.09.2013:

Musterlösungen

Aufgabe 1

Wir betrachten die erweiterte Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & | & 0 \\ 4 & 2 & 2 & | & 0 \\ 3 & 1 & 0 & | & 1 \\ -2 & 0 & 2 & | & t \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren das Doppelte der ersten Zeile von der zweiten und addieren dann die vierte Zeile zur ersten und dritten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 & | & t \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 1 & 1 & 2 & | & t+1 \\ -2 & 0 & 2 & | & t \end{pmatrix}.$$

Nun machen wir die dritte Zeile zur ersten, die erste zur zweiten, die vierte zur dritten und die zweite zur vierten Zeile:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & t+1 \\ 0 & 1 & 3 & | & t \\ -2 & 0 & 2 & | & t \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Jetzt addieren wir das Doppelte der ersten Zeile zur dritte Zeile und subtrahieren dann die zweite Zeile von der ersten:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & | & t \\ 0 & 2 & 6 & | & 3t+2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Wir subtrahieren das Doppelte der zweiten Zeile von der dritten Zeile

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 3 & | & t \\ 0 & 0 & 0 & | & t+2 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Die Koeffizientenmatrix hat den Rang 2, die erweiterte den Rang 2, wenn $t+2=0$ gilt, und den Rang 3, wenn $t+2 \neq 0$ gilt. Das Gleichungssystem hat also genau dann mindestens eine Lösung, wenn $t+2=0$, also $t=-2$ gilt.

Aufgabe 2

(a) Seien $A, B \in M_{22}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \varphi(A+B) &= (A+B)X - X(A+B) = AX + BX - XA - XB \\ &= AX - XA + BX - XB = \varphi(A) + \varphi(B). \end{aligned}$$

© FernUniversität in Hagen, 2013

Sei nun $A \in M_{22}(\mathbb{R})$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\varphi(\lambda A) = (\lambda A)X - X(\lambda A) = \lambda AX - \lambda XA = \lambda(AX - XA) = \lambda\varphi(A).$$

Also ist φ linear.

(b) Es ist

$$\begin{aligned}
\varphi\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\\
&= 0\cdot E_{11} + 1\cdot E_{12} + 0\cdot E_{21} + 0\cdot E_{22}.\\
\varphi\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\\
&= 0\cdot E_{11} + 0\cdot E_{12} + 0\cdot E_{21} + 0\cdot E_{22}.\\
\varphi\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\1&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1&0\\0&1\end{pmatrix}\\
&= (-1)\cdot E_{11} + 0\cdot E_{12} + 0\cdot E_{21} + 1\cdot E_{22}.\\
\varphi\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0&1\\0&1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}\\
&= 0\cdot E_{11} + (-1)E_{12} + 0\cdot E_{21} + 0\cdot E_{22}.
\end{aligned}$$

Damit gilt

$${}_{\mathcal{B}}M_{\mathcal{B}}(\varphi) = \begin{pmatrix}0&0&-1&0\\1&0&0&-1\\0&0&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

Mit dem Rangsatz (angewendet auf φ) gilt

$$\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(U).$$

Da φ nach Voraussetzung injektiv ist, gilt $\dim(\mathrm{Kern}(\varphi)) = 0$, also $\dim(\mathrm{Bild}(\varphi)) = \dim(U)$. Weiter ist nach Voraussetzung $\mathrm{Bild}(\varphi) = \mathrm{Kern}(\psi)$, also folgt $\dim(\mathrm{Kern}(\psi)) = \dim(U)$. Mit dem Rangsatz (angewendet auf ψ) folgt nun

$$\dim(\mathrm{Kern}(\psi)) + \dim(\mathrm{Bild}(\psi)) = \dim(U) + \dim(\mathrm{Bild}(\psi)) = \dim(V).$$

Da ψ nach Voraussetzung surjektiv ist, ist $\dim(\mathrm{Bild}(\psi)) = \dim(W)$ und somit

$$\dim(U) + \dim(W) = \dim(V).$$

Aufgabe 4

Für den Induktionsanfang sei $n = 1$. Dann gilt für alle $x \in \mathbb{R}$ mit Quotientenregel

$$f^{(1)}(x) = f'(x) = \frac{e^x - xe^x}{(e^x)^2} = \frac{1-x}{e^x} = (-1)\frac{x-1}{e^x},$$

© FernUniversität in Hagen, 2013

also gilt der Induktionsanfang.

Als Induktionsannahme nehmen wir an, dass $f^{(n)}(x) = (-1)^n \frac{x-n}{e^x}$ für ein festes $n \in \mathbb{N}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt. Dann folgt (wieder mit Quotientenregel)

$$\begin{aligned} f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) = \left((-1)^n \frac{x-n}{e^x}\right)' = (-1)^n \frac{e^x - (x-n)e^x}{(e^x)^2} = (-1)^n \frac{1-(x-n)}{e^x} \\ &= (-1)^n \frac{-x+(n+1)}{e^x} = (-1)^{n+1} \frac{x-(n+1)}{e^x} \end{aligned}$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Dabei wurde beim zweiten Gleichheitszeichen die Induktionsannahme benutzt. Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Aufgabe 5

(a) Es gilt

$$\frac{n^3(n+1)^2}{3n^5 - 2\pi} = \frac{n^3(n^2+2n+1)}{3n^5 - 2\pi} = \frac{n^5 + 2n^4 + n^3}{3n^5 - 2\pi} = \frac{1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 - \frac{2\pi}{n^5}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Da $\lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n^5} = 0$ gilt, folgt

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{2}{n} + \frac{1}{n^2}) = 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{2}{n} + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 1 + 0 + 0 = 1$$

und

$$\lim_{n\to\infty} (3 - \frac{2\pi}{n^5}) = 3 - \lim_{n\to\infty} \frac{2\pi}{n^5} = 3 - 0 = 3,$$

also insgesamt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3(n+1)^2}{3n^5 - 2\pi} = \frac{1}{3}.$$

(b) Wir verwenden die Substitutionsregel mit $f(u) = \frac{1}{u}$ und $g(x) = x^4 + 1$. Dann ist $g'(x) = 4x^3$, also

$$\int_1^2 \frac{x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \int_1^2 \frac{4x^3}{x^4+1} dx = \frac{1}{4} \int_2^{17} \frac{1}{u} du = \frac{1}{4} \ln(u)\Big|_2^{17} = \frac{1}{4}\ln(17) - \frac{1}{4}\ln(2) = \frac{1}{4}\ln(\frac{17}{2}).$$

Aufgabe 6

Sei $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = e^{x-1} + x^2 - 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f stetig und differenzierbar auf $[0,1]$. Es gilt $f(0) = e^{-1} - 1 < 0$ und $f(1) = 1 - 1 + 1 = 1 > 0$. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano hat f also mindestens eine Nullstelle im Intervall $(0,1)$. Weiter gilt

$$f'(x) = e^{x-1} + 2x \text{ für } x \in [0,1]$$

und damit $f'(x) > 0$ für alle $x \in [0,1]$. Die Funktion f ist damit auf dem ganzen Intervall streng monoton steigend und kann daher nur höchstens eine Nullstelle haben. Insgesamt ist damit gezeigt, dass f genau eine Nullstelle auf $[0,1]$ besitzt. Diese Nullstelle ist genau das $x \in [0,1]$, für das $1 - x^2 = e^{x-1}$ gilt.

© FernUniversität in Hagen, 2013

Aufgabe 7

Die vorgegebene Reihe ist eine Potenzreihe mit $a_n = \sqrt{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wir können den Konvergenzradius mit dem Konvergenzkriterium von Cauchy-Hadamard berechnen. Dazu betrachten wir

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\sqrt[n]{n}}.$$

Da die Wurzelfunktion stetig ist, dürfen wir den Grenzwert unter die Wurzel ziehen. Wegen $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\sqrt{n}} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}} = \sqrt{1} = 1.$$

Damit ist der Konvergenzradius der Potenzreihe $\frac{1}{1} = 1$, und die Potenzreihe konvergiert für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$. Man hätte mit etwas mehr Aufwand auch die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n} x^n$ einmal für $|x| < 1$ und einmal für $|x| > 1$ mit dem Quotienten- oder Wurzelkriterium abschätzen können.

Für $x = 1$ müssen wir die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}$ betrachten. Da $(\sqrt{n})_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge ist (sie ist monoton wachsend und unbeschränkt), kann diese Reihe nicht konvergieren. Da auch $((-1)^n\sqrt{n})$ keine Nullfolge ist, divergiert auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{n}(-1)^n$.

Aufgabe 8

(a) Die Formel $\alpha = (A \vee B) \wedge (\neg A \vee \neg B)$ ist erfüllbar, aber weder tautologisch noch widerspruchsvoll. Mit der Bewertung $\mathcal{I}(A) = \mathbf{1}$ und $\mathcal{I}(B) = \mathbf{0}$ gilt $\mathcal{I}(\alpha) = \mathbf{1}$, und mit der Bewertung $\mathcal{I}(A) = \mathbf{1}$ und $\mathcal{I}(B) = \mathbf{1}$ gilt $\mathcal{I}(\alpha) = \mathbf{0}$.

(b) Die Formel $\gamma = ((A \wedge B) \to C) \leftrightarrow (A \to (B \to C))$ ist eine Tautologie. Für den zweiten Teil der Formel gilt nämlich

$$\begin{aligned}
A \to (B \to C) &\approx \neg A \vee (B \to C) && \text{(Junktorminimierung)}\\
&\approx \neg A \vee (\neg B \vee C) && \text{(Junktorminimierung)}\\
&\approx (\neg A \vee \neg B) \vee C && \text{(Assoziativgesetze)}\\
&\approx \neg(A \wedge B) \vee C && \text{(deMorgan)}\\
&\approx (A \wedge B) \to C && \text{(Junktorminimierung rückwärts)}
\end{aligned}$$

Damit stehen in γ links und rechts von der Äquivalenz äquivalente Formeln, γ ist also immer erfüllt und damit eine Tautologie (was man natürlich auch mit einer Wahrheitstafel zeigen kann).

© FernUniversität in Hagen, 2013